Spettro di un segnale- Diagramma di Bode- Filtri

La trasformata di Fourier, lo spettro e la banda di un segnale.

- ***La Serie di Fourier.***

Il teorema di Fourier sancisce che una qualsiasi grandezza periodica è sempre scomponibile nella somma di infiniti termini sinusoidali (mediante lo sviluppo in serie di Fourier).
In Figura 1 sono rappresentate alcune immagini che mostrano lo sviluppo armonico di un'onda quadra.

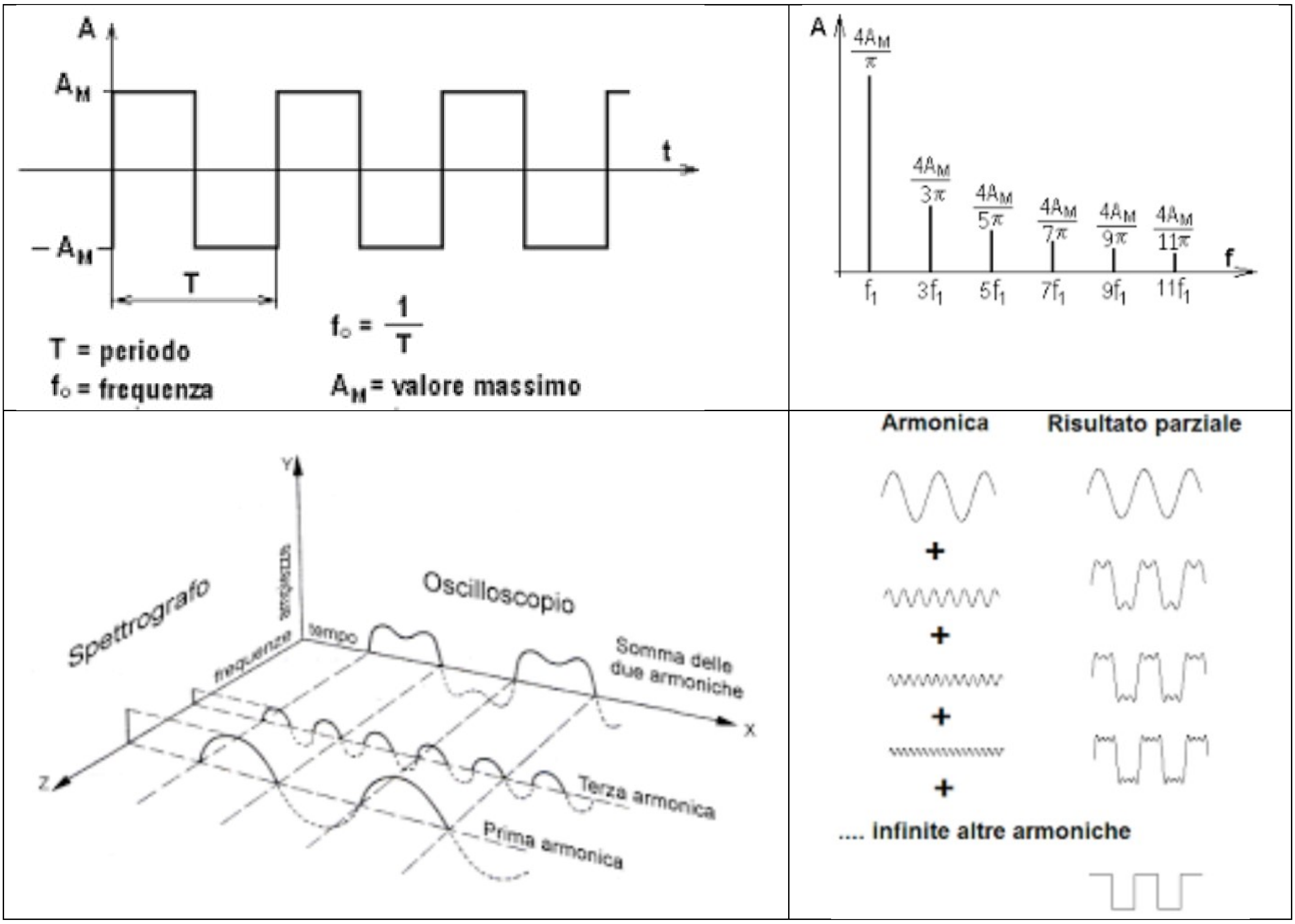


Figura 1: sviluppo armonico di un'onda quadra

- ***La Trasformata di Fourier.***

La trasformata di Fourier (e le sue varianti) permette di passare dalla descrizione di un segnale nel dominio del tempo x(t) alla sua descrizione nel dominio della frequenza X(f). Le formule della trasformata e dell'anti-trasformata di Figura 2 sono integrali con numeri complessi scritti in forma compatta. Matematicamente la risoluzione di tali integrali è complessa, ci sono metodi e strumenti per superare questa difficoltà: diversi strumenti di misura (oscilloscopi) e di elaborazione (simulatori) del segnale hanno integrata questa capacità di calcolo.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j 2\pi f t} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{+j 2\pi f t} df$$

Figura 2: Trasformata e antitrasformata di Fourier

- ***Lo Spettro di un Segnale***

Lo spettro di un segnale è la sua rappresentazione nel dominio della frequenza

In Figura 3 è rappresentato un esempio di un segnale (onda sonora) nel dominio del tempo e nel dominio della frequenza.

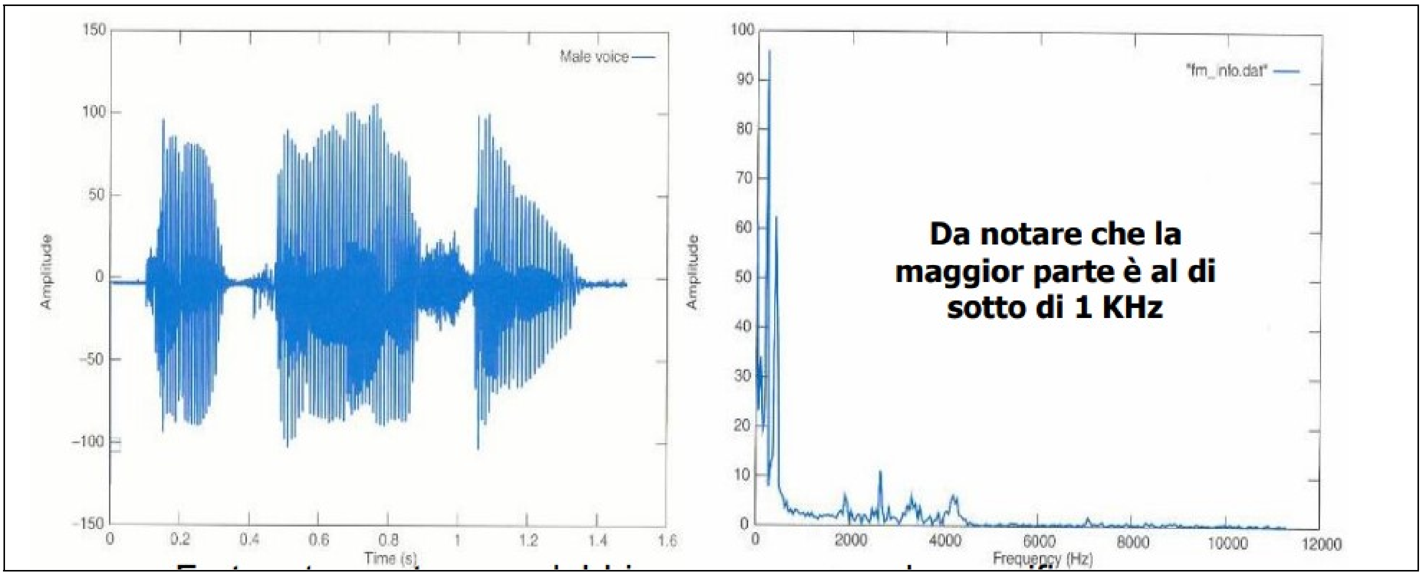


Figura 3: Onda sonora e suo spettro in frequenza

- ***La Banda di un Segnale***

Nelle telecomunicazioni sono particolarmente importanti quei segnali per i quali tutte le armoniche di frequenza superiori ad un certo valore B risultano di ampiezza nulla o trascurabile.
Più in generale un segnale si dice limitato in banda (e tutti i segnali reali lo sono) se tutte le sue componenti in frequenza esterne a un certo intervallo di frequenze, detto banda B, risultano di ampiezza nulla o trascurabile.
I segnali di questo tipo si dicono limitati in banda ed il valore B prende il nome di larghezza di banda del segnale. In generale si chiama banda l'insieme delle frequenze comprese in un certo intervallo.

I logaritmi e la loro utilità nella rappresentazione dei segnali

Oggi esistono calcolatrici e computer e non ci si rende conto di quanto sia importante fare i calcoli rapidamente ed in modo preciso.
Quando Nepero inventò i logaritmi i matematici contemporanei, soprattutto quelli che si occupavano di astronomia ed astrologia, ne furono entusiasti, in quanto i logaritmi facilitarono i "calcoli astronomici", sulla posizione dei pianeti, nel presente, nel passato e nel futuro.
Con i logaritmi è possibile trasformare prodotti in somme, quozienti in differenze, elevamenti a potenza in prodotti e calcoli di radici in quozienti, quindi tutte le operazioni vengono molto semplificate.
Si aggiunga che i nostri sensi sono "logaritmici": se ad esempio ascoltiamo un suono e sentiamo poi un altro suono che ci sembra di intensità doppia, misurandolo vediamo che ha intensità quattro volte superiore, la stessa cosa se vediamo una luce; se vediamo un'altra luce che ci sembra 3 volte più forte e la misuriamo troviamo che è 9 volte più forte; cioè i nostri sensi sono in scala logaritmica, cosa che ci permette di poter avere uno spettro di sensazioni molto più ampio di quello che avremmo se i nostri sensi fossero lineari. La risposta logaritmica della nostra vista ad un segnale luminoso ci permette di vedere le stelle in una notte buia senza rimanere abbagliati da un paesaggio illuminato dal sole in pieno giorno. La risposta logaritmica dell'udito ci permette di ascoltare il fruscio delle foglie in una giornata di leggera brezza ma anche di sentire senza danni il rombo di un aereo che decolla.

- ***Definizione di Logaritmo, esempi, rappresentazione grafica***

Si dice logaritmo in base a (a > 0, a ≠1) del numero b (b > 0) l'esponente che si deve alla base a per ottenere l'argomento b:

$$c = \log_a b \iff a^c = b$$

Le basi più utilizzate sono il 10, e la costante matematica e, approssimativamente $e \cong 2{,}7182818$.
e è un numero irrazionale, è base della funzione esponenziale e^x e, appunto, del cosiddetto "logaritmo naturale", indicato nelle calcolatrici con il simbolo ln, per distinguerlo dal logaritmo con base 10, indicato con il simbolo log.
I seguenti esempi sono a scopo di chiarimento:

$\log_{10} 100 = 2$ infatti $10^2=100$
$\log_{10} 0{,}001 = -3$ infatti $10^{-3}=0{,}001$
$\log_{10} 75000 \cong 4{,}875$ ottenuto da calcolatrice scientifica, 75000 poi tasto log. Infatti $10^{4,875} \cong 75000$
$ln\, 75000 \cong 11{,}225$ ottenuto da calcolatrice scientifica, 1000 poi tasto ln. $e^{11,225} \cong 75000$

La caratteristica della funzione logaritmica è di ridurre drasticamente i valori molto grandi rispetto a 1 e ampliare altrettanto drasticamente intervalli di valori molto più piccoli di 1, come può essere dedotto dalla rappresentazione grafica di Figura 4.

Le seguenti proprietà dei logaritmi permettono di 'trasformare prodotti in somme e rapporti in differenze e elevamenti a potenza in prodotti:

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$$

$$\log_a(b/c) = \log_a(b) - \log_a(c)$$

$$\log_a(b)^c = c \cdot \log_a(b)$$

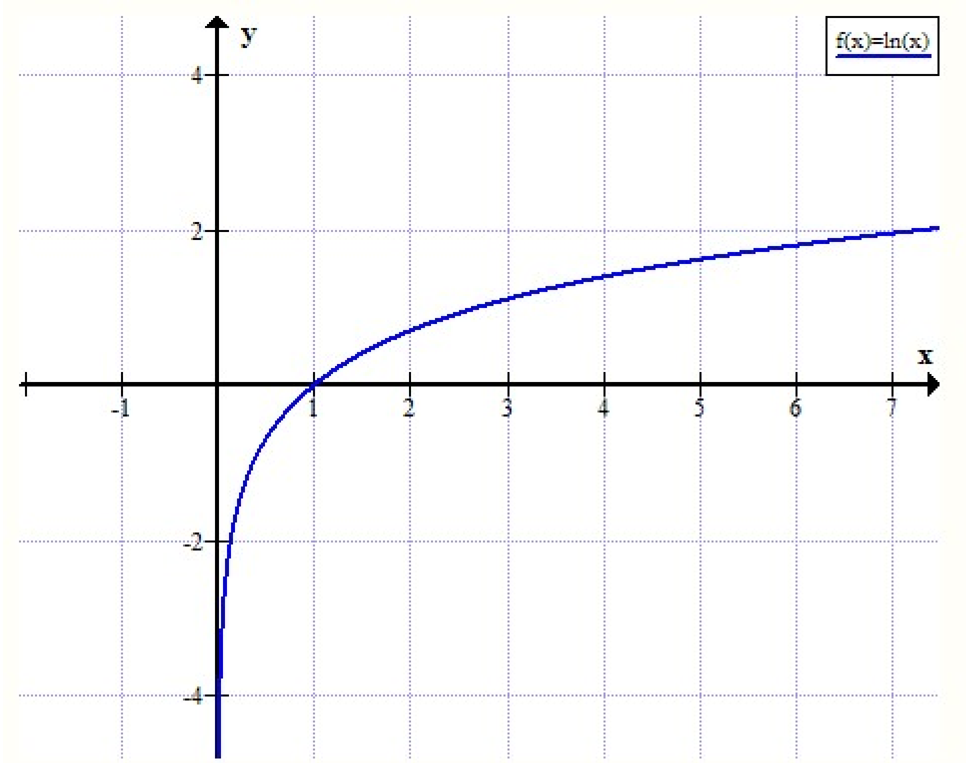


Figura 4: rappresentazione grafica della funzione y=ln(x)

Il diagramma di Bode, il decibel, la risposta in frequenza

- ***Il diagramma di Bode, il decibel***

Lo spettro X(f) di un segnale può essere rappresentato graficamente mediante i Diagrammi di Bode.
I Diagrammi di Bode sono due:

1) Diagramma delle ampiezze: rappresenta il modulo |X(f)| in funzione della frequenza f. Sia il modulo |X(f)| che f vengono espressi in scala logaritmica. Tipicamente per i moduli |X(f)| si usano i decibel, “db”. Il decibel `e un’unità logaritmica convenzionale che normalmente si impiega per esprimere quantità positive, tipicamente il guadagno di amplificatori:

   $A_{db} = 20 \log_{10} A$

   mentre per la pulsazione ω si usa la scala logaritmica in base 10.
   Si noti come, a causa delle proprietà dei logaritmi, moltiplicando (o dividendo) A per 10, il valore di Adb risulta incrementarsi (decrementarsi) di 20.

2) Diagramma delle fasi: rappresenta la fase di X(f) in funzione della frequenza f. In questo caso la fase viene espressa in scala lineare, mentre la pulsazione ω viene espressa in scala logaritmica base 10.

- ***La risposta in frequenza, la funzione di trasferimento***

Il diagramma di Bode viene utilizzato soprattutto per rappresentare graficamente la “risposta in frequenza” di un sistema lineare: dato un segnale sinusoidale in ingresso, in seguito alla trasformazione lineare compiuta dal sistema (ad esempio, la derivazione o l'integrazione del segnale), il segnale presente in uscita ha la stessa frequenza del segnale presente in ingresso. Nei diagrammi di Bode vengono quindi rappresentati, per ogni frequenza, il rapporto, in db, tra ampiezza del segnale in uscita e ampiezza del segnale in ingresso in ingresso (nel diagramma delle ampiezze) e lo sfasamento tra il segnale in uscita e quello in ingresso (nel diagramma delle fasi).

Dal punto di vista analitico la risposta in frequenza coincide con la cosiddetta funzione di trasferimento H(f) che, nel dominio della frequenza, e quindi sotto forma di numeri complessi, è quella espressione che, moltiplicata per la trasformata di Fourier X(f) (o sue varianti come la trasformata di Laplace) del segnale di ingresso, permette di ottenere la trasformata di Fourier del segnale di uscita Y(f)=H(f)*X(f).

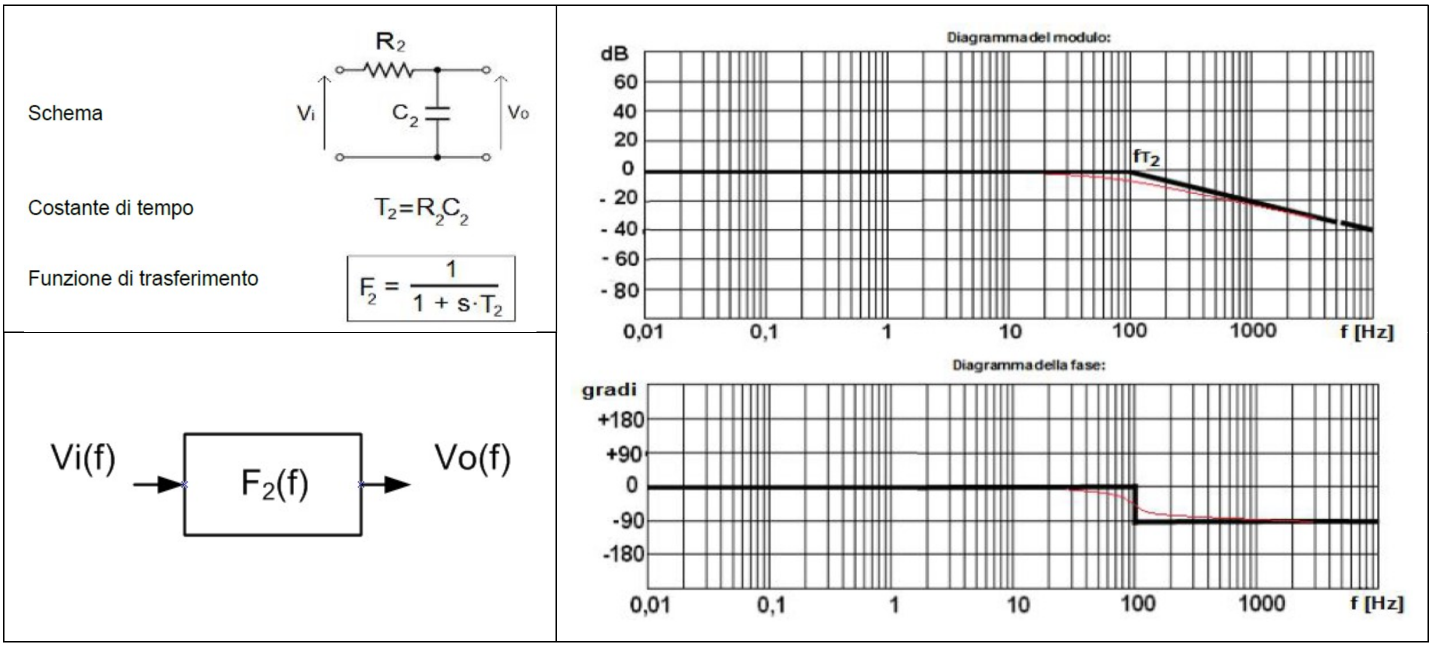


Figura 5: Esempio di Funzione di trasferimento (caso del filtro passa basso del prim'ordine), espressione analitica e diagrammi di Bode

In Figura 6 sono rappresentate, nel dominio del tempo, due forme d'onda sinusoidali x(t) e y(t) sfasate di 90^0, con y(t) sfasata di -90^0 rispetto a x(t), ovvero con y(t) in ritardo di 90^0 rispetto a x(t).

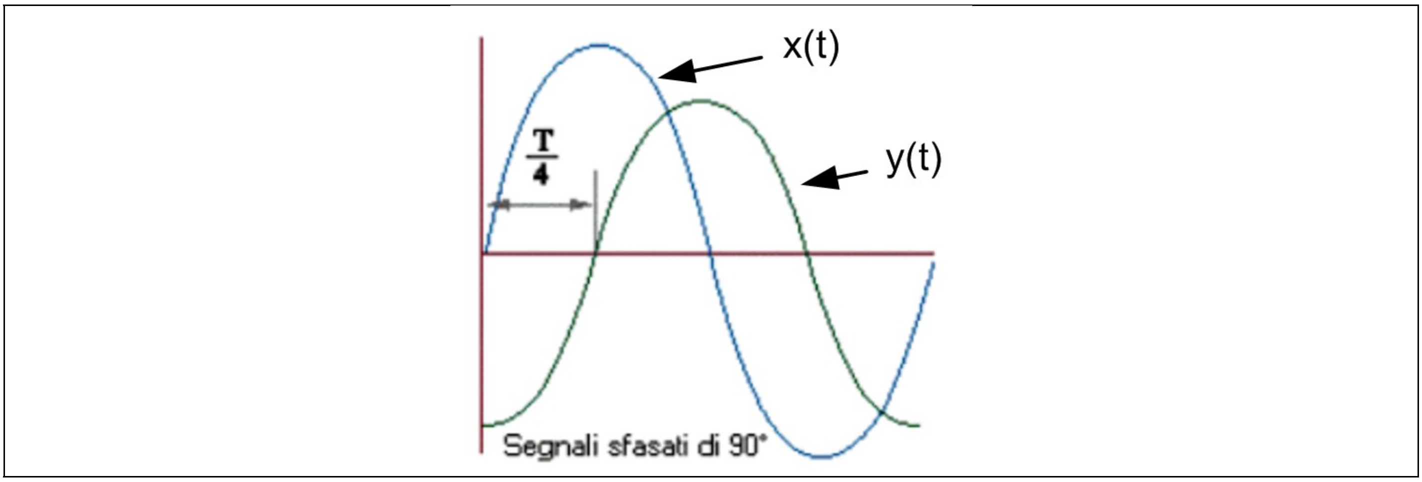


Figura 6: x(t) è in anticipo di 90 gradi rispetto a y(t)

Filtri

Un filtro è un dispositivo che elabora il segnale posto al suo ingresso; tipicamente elimina (o attenua) determinate (bande di) frequenze mentre lascia passare tutte le altre (eventualmente anche amplificandole).

- ***Frequenza di taglio***

La/le Frequenza/e di taglio sono la/le frequenza/e che delimitano la banda passante, convenzionalmente calcolata/e a -3dB cioè quando il guadagno di tensione, rispetto al valore massimo nella banda passante, si riduce circa al 70%

Analiticamente,
$-3 = 20 \cdot \log A$
$\log A = -3/20$
$\mathrm{A} = 10^{\log A} = 10^{-3/20} \cong 0{,}71$

- ***Filtro passa basso***

Lascia passare le basse frequenze (sotto la frequenza di taglio) ed elimina (in realtà attenua se reale) le alte frequenze (sopra la frequenza di taglio)

- ***Filtro passa alto***

Lascia passare le alte frequenze (sopra la frequenza di taglio) ed elimina (in realtà attenua se reale) le basse frequenze (sotto la frequenza di taglio)

- ***Filtro passa banda***

lascia passare le frequenze comprese fra un minimo (frequenza di taglio inferiore) ed un massimo (frequenza di taglio superiore) ed elimina (in realtà attenua se reale) tutte le altre

- ***Filtro elimina banda***

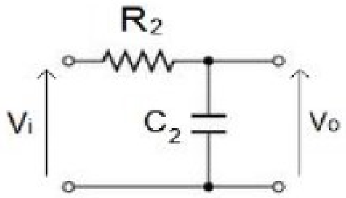
Elimina tutte le frequenze (in realtà attenua se reale) tutte le frequenze comprese fra un minimo (frequenza di taglio inferiore) ed un massimo (frequenza di taglio superiore) e lascia passare le altre.

- ***Filtri passivi e filtri attivi***

Se il filtro è passivo il guadagno (modulo della funzione di trasferimento) nella banda passante è al massimo 1
Se il filtro è attivo (cioè contiene amplificatori) il guadagno nella banda passante può essere maggiore di 1
Nelle prossime pagine si mostrano gli schemi, le funzioni di trasferimento, le frequenze di taglio e i diagrammi di Bode di alcuni filtri.

FILTRO PASSIVO PASSA BASSO (detto RC del 1° ORDINE)

Schema



Costante di tempo $T_2 = R_2 C_2$

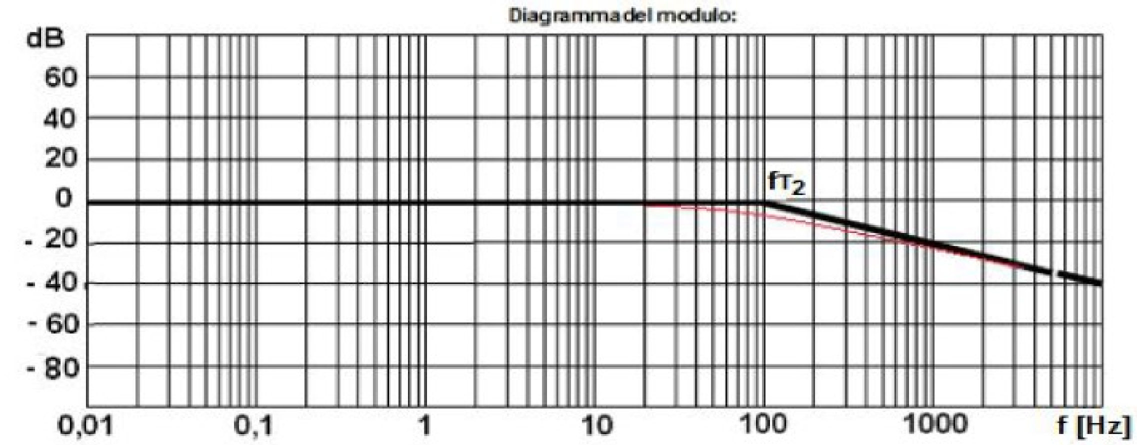
Funzione di trasferimento $\boxed{F_2 = \frac{1}{1 + s \cdot T_2}}$

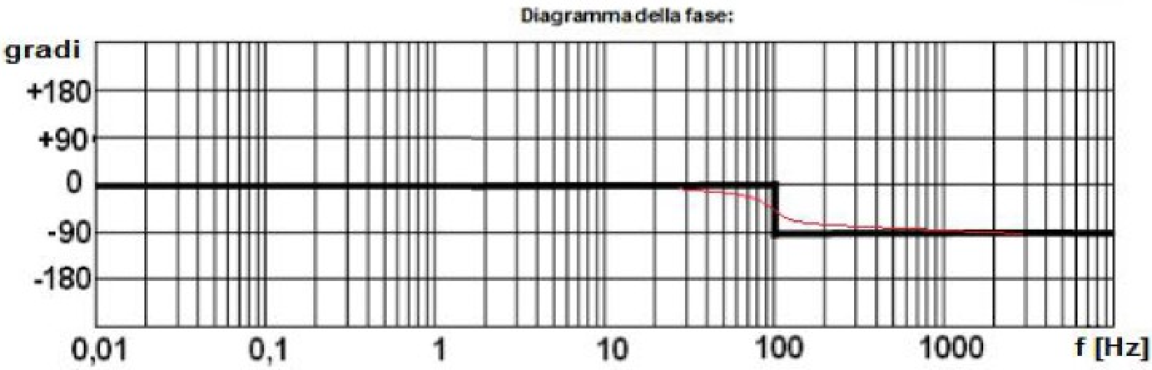
Zeri e poli z nessuno $p_2 = -\frac{1}{R_2 C_2}$

Guadagno nella banda $\boxed{Av = 1 \ (=0dB)}$

Frequenza di taglio $\boxed{f_{T2} = \frac{1}{2\pi \cdot R_2 C_2}}$

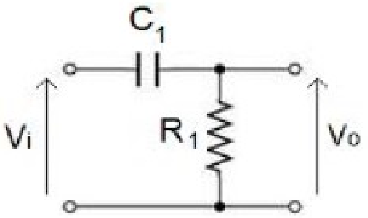
Diagrammi di Bode (modulo e fase) (nell'esempio f_{T1}=100Hz)





FILTRO PASSIVO PASSA ALTO (detto CR del 1° ORDINE)

Schema



Costante di tempo

$$T_1 = R_1 C_1$$

Funzione di trasferimento

$$\boxed{F_1 = \frac{s \cdot T_1}{1 + s \cdot T_1}}$$

Zeri e poli

$$z = 0 \quad p_1 = -\frac{1}{R_1 C_1}$$

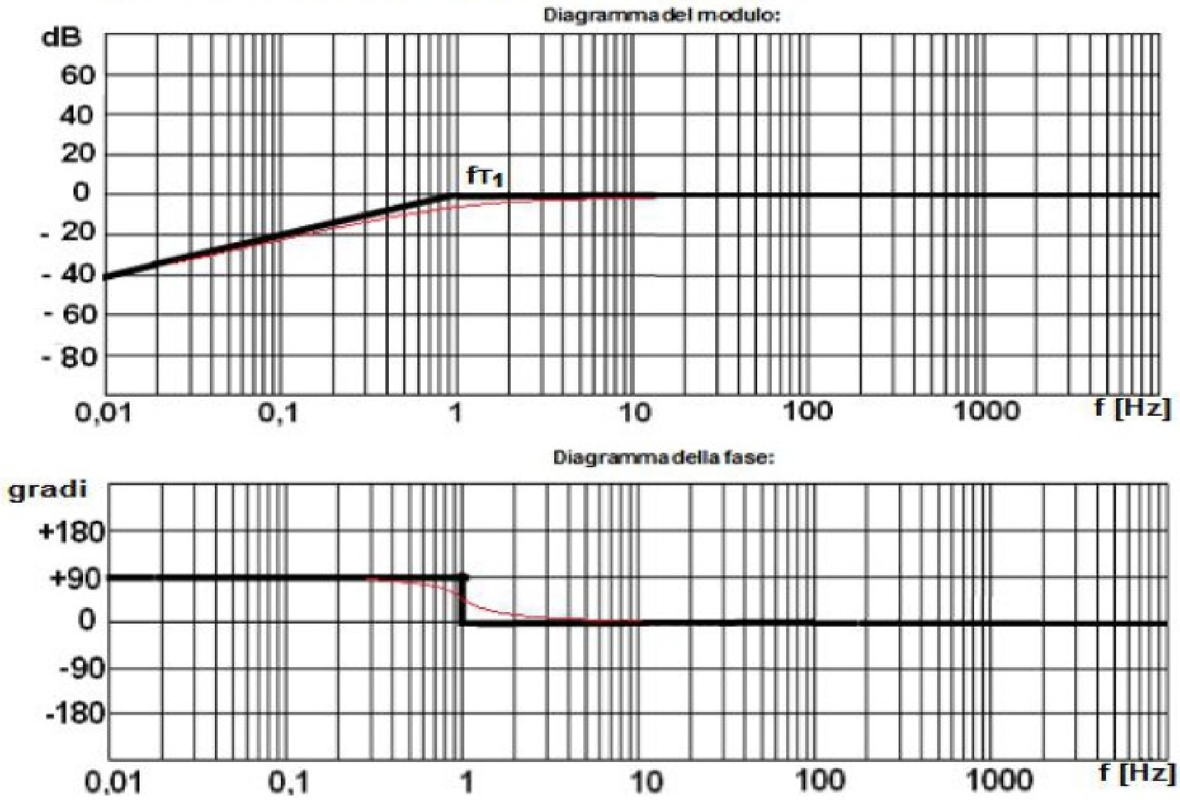
Guadagno nella banda

$$\boxed{Av = 1 \ (=0dB)}$$

Frequenza di taglio

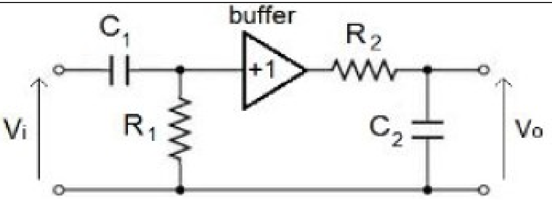
$$\boxed{f_{T1} = \frac{1}{2\pi \cdot R_1 C_1}}$$

Diagrammi di Bode (modulo e fase) (nell'esempio f_{T2}=1Hz)



FILTRO PASSIVO PASSA BANDA (RC + CR del 2° ordine)

Schema
(passa alto +passa basso in cascata; il buffer serve come separatore)



Costanti di tempo $T_1 = R_1C_1$ $T_2 = R_2C_2$

Funzione di trasferimento

$$F = F_1 \cdot F_2 = \frac{s \cdot T_1}{(1 + s \cdot T_1)\cdot(1 + s \cdot T_2)}$$

Zeri e poli

$$z = 0 \quad p_1 = -\frac{1}{R_1C_1} \quad p_2 = -\frac{1}{R_2C_2} \quad |p_1| < |p_2|$$

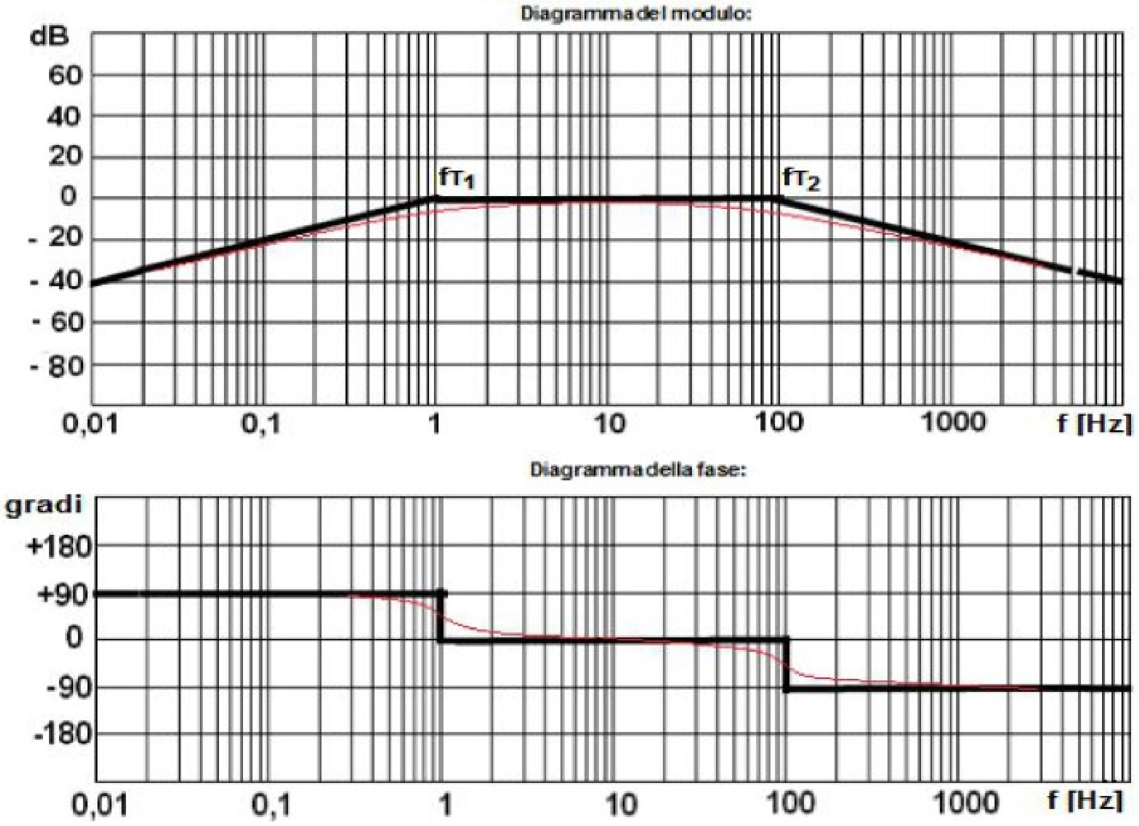
Guadagno nella banda: Av = 1 (=0dB)

Frequenze di taglio

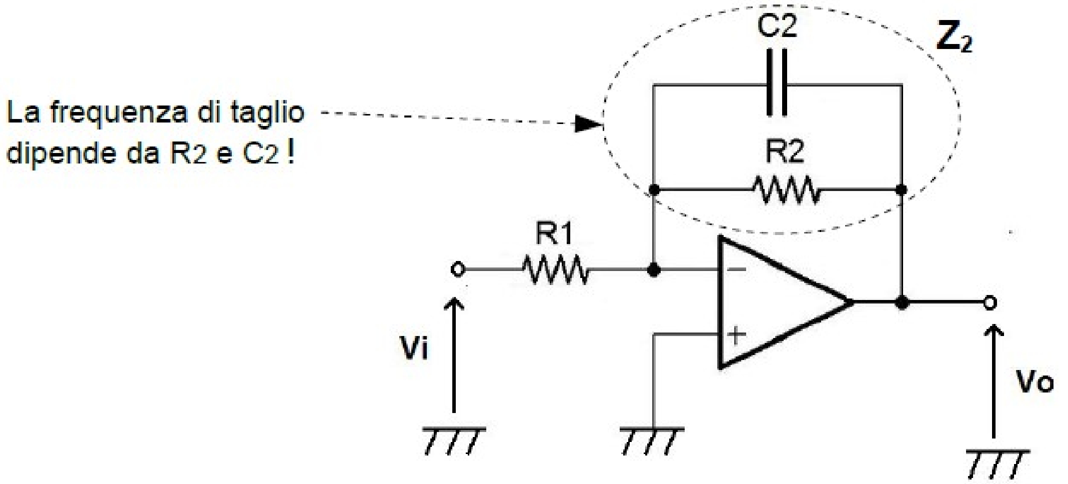
$$f_{T1} = \frac{1}{2\pi \cdot R_1C_1} \qquad f_{T2} = \frac{1}{2\pi \cdot R_2C_2}$$

inferiore — superiore

Diagrammi di Bode (modulo e fase) (nell'esempio f_{T2}=1Hz e f_{T2}=100Hz)



FILTRO ATTIVO PASSA BASSO (del 1° ORDINE)



La risposta in frequenza del filtro si calcola con la formula **$F(j\omega) = Vo/Vi = - Z_2 / Z_1$** dove

$Z_1 = R_1$
$Z_2 = R_2 \,//\, 1/j\omega C_2 = R_2 / (1 + j\omega C_2 R_2)$ $\Rightarrow$ $$F(j\omega) = \frac{-R_2/R_1}{1 + j\omega R_2 C_2}$$

Guadagno nella banda (ad "alta" frequenza)	$Av = - R_2 / R_1$
Frequenza di taglio	$f_{T2} = \dfrac{1}{2\pi \cdot R_2 C_2}$

Diagrammi di Bode (modulo e fase) (nell'esempio f_{T1}=100Hz, $R_2 = 10 \cdot R_1$)

Diagramma del modulo:

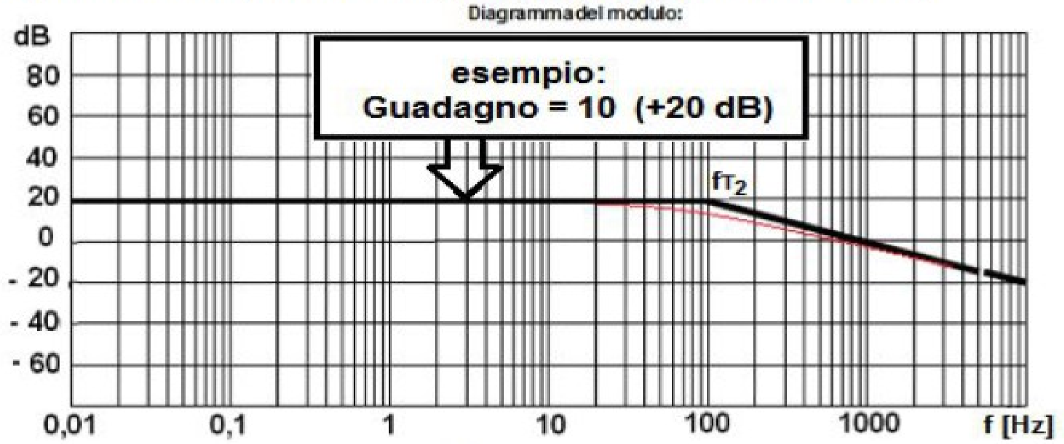
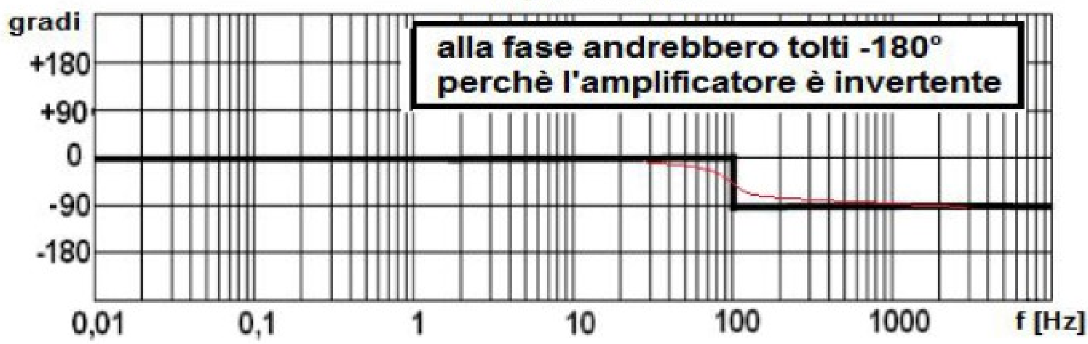
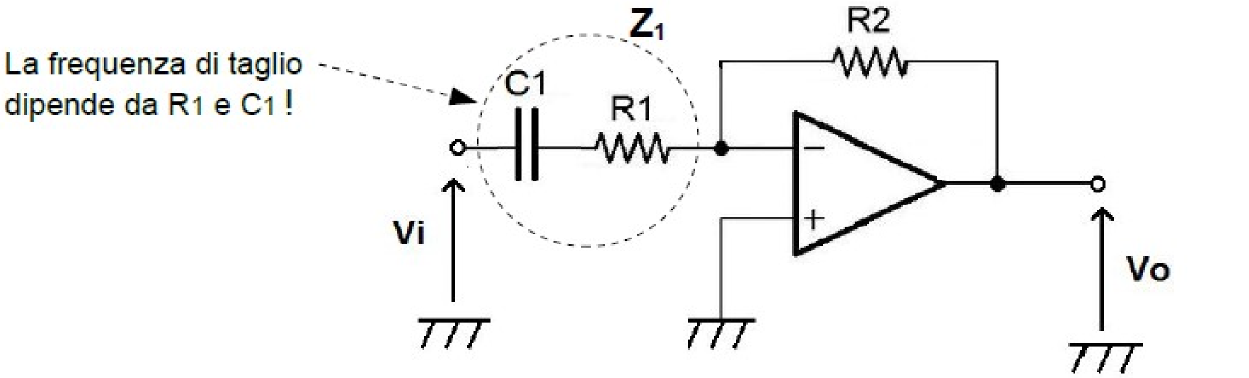


Diagramma della fase:



FILTRO ATTIVO PASSA ALTO (del 1° ORDINE)



La risposta in frequenza del filtro si calcola con la formula **$F(j\omega) = Vo/Vi = - Z_2 / Z_1$** dove

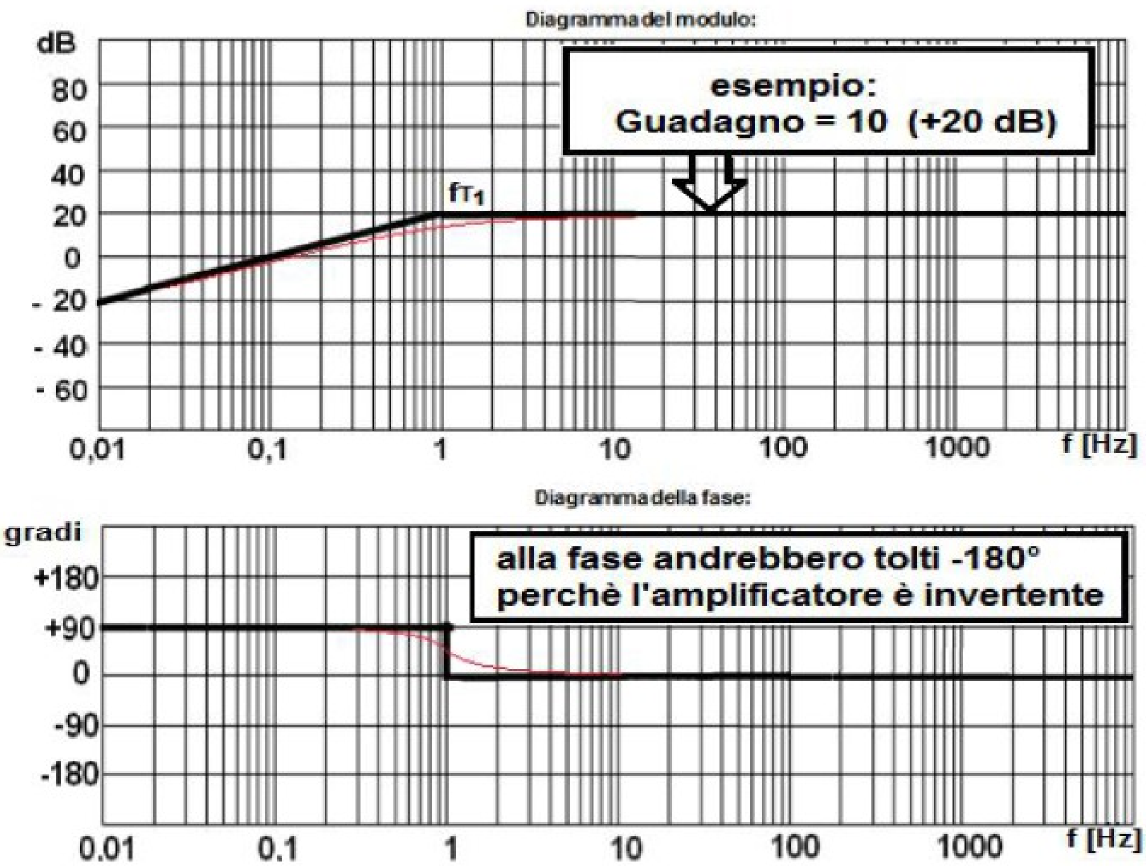
$Z_1 = R_1 + 1/j\omega C_1$
$Z_2 = R_2$

$$\Rightarrow \quad \boxed{F(j\omega) = \frac{-j\omega R_2 C_1}{1 + j\omega R_1 C_1}}$$

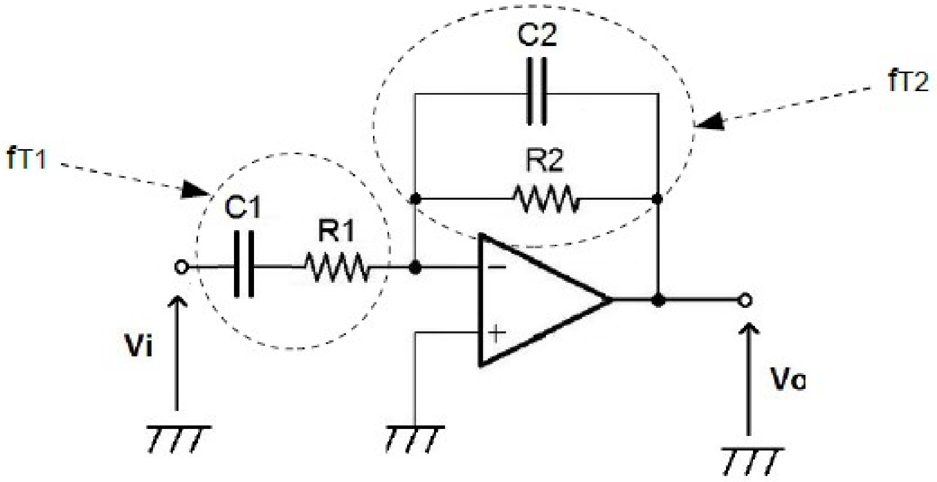
Guadagno nella banda (ad "alta" frequenza) $\quad \boxed{Av = -R2 / R1}$

Frequenza di taglio $\quad \boxed{f_{T1} = \dfrac{1}{2\pi \cdot R_1 C_1}}$

Diagrammi di Bode (modulo e fase) (nell'esempio f_{T1}=1Hz, R2 = 10·R1)



FILTRO ATTIVO PASSA BANDA (del 2° ordine)



Guadagno nella banda ($f_{T1} < f < f_{T2}$ circa)

$$A_V = -R_2 / R_1$$

Frequenze di taglio

$$f_{T1} = \frac{1}{2\pi \cdot R_1 C_1}$$

inferiore

$$f_{T2} = \frac{1}{2\pi \cdot R_2 C_2}$$

superiore

Diagrammi di Bode (modulo e fase) (nell'esempio f_{T1}=1Hz e f_{T2}=100Hz; $R_2 = 10 \cdot R_1$)